MINISTERUL EDUCAȚIEI

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Admitere 2021: Sesiuni online de pregătire la matematică

Aplicaţii ale Calculului Diferenţial şi Integral

Conf.univ.dr.mat. Adela Capătă

Problema 1. (Culegere 785) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^3 + ax$, unde a este un parametru real. Determinaţi valoarea parametrului a astfel încât graficul funcţiei f să fie tangent axei Ox.

Soluţie:

Deoarece graficul funcţiei f este tangent axei Ox avem $f(x) = 0$ şi $f'(x) = 0$. Rezolvăm sistemul:

Avem sistemul:

$$\begin{cases} x^3 + ax = 0 \\ 3x^2 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + ax = 0 \\ a = -3x^2, \end{cases}$$

ce ne conduce la soluţia $(x = 0, a = 0)$. Răspuns D

Problema 2. (Culegere 832) Fie $a \in \mathbb{R}$ şi fie funcţiile $f, g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = ax^2 + x \text{ şi } g(x) = \ln(1 + x).$$

Se cere mulţimea valorilor lui a pentru care graficele funcţiilor f şi g au tangentă comună într-un punct comun.

Soluţie:

Folosim: condiţia de tangenţă a graficelor funcţiilor f şi g în punctul de abscisă x_0 este:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$$

Astfel avem:

$$\begin{cases} ax^2 + x = \ln(1 + x) \\ 2ax + 1 = \dfrac{1}{1 + x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + x = \ln(1 + x) \\ (2ax + 1)(1 + x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + x = \ln(1 + x) \\ x(2ax + 2a + 1) = 0. \end{cases}$$

Observăm că $x = 0$ conduce la obţinerea în prima ecuaţie a unei identităţi adevărate pentru orice $a \in \mathbb{R}$. Prin urmare, $a \in \mathbb{R}$. Răspuns E

Problema 3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(x + 1)^3}{x^2 - x + 1}$.

(Culegere 362) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul în care graficul funcţiei intersectează axa Oy este: $y - 4x - 1 = 0$. Răspuns C

Soluţie:

Ecuaţia tangentei în punctul $M(x_0, f(x_0))$ ce aparţine graficului funcţiei f este:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Determinăm coordonatele punctului în care graficul funcţiei intersectează axa Oy. Astfel $x = 0$, iar $f(0) = 1$ şi $M(0, 1)$.

Derivata funcţiei, adică

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x^2-x+1)^2},$$

ne conduce la $f'(0) = 4$.

Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul $M(0, 1)$ este:

$$y - 1 = 4x \Longleftrightarrow y - 4x - 1 = 0.$$

(Culegere 363) Ecuaţia normalei la graficul funcţiei f în punctul în care graficul funcţiei intersectează axa Oy este: $y + \frac{1}{4}x - 1 = 0$. Răspuns D

Soluţie:

Deoarece tangenta şi normala sunt drepte perpendiculare, avem $f'(0) \cdot m_N = -1$, de unde

$$m_N = -\frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{4}.$$

Ecuaţia normalei în punctul $M(0, 1)$ este

$$y - 1 = m_N \cdot x \Longleftrightarrow y + \frac{1}{4}x - 1 = 0.$$

Problema 4. Să se determine abscisa c a unui punct în care tangenta la graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2}, & x \leq 0 \\ \sqrt{1+x}, & x > 0 \end{cases}$$

să fie paralelă cu coarda ce uneşte punctele de abscise $x_1 = -4$, $x_2 = 3$.

Soluţie:

Punctele de abscise $x_1 = -4$, $x_2 = 3$ sunt $A(-4, f(-4))$ şi $B(3, f(3))$. Problema constă în a determina un punct de abscisă c de pe graficul funcţiei f astfel încât tangenta în acel punct să fie paralelă cu coarda AB.

Teorema lui Lagrange. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$, $a, b \in I$ cu $a < b$, f este continuă pe $[a, b]$ şi este derivabilă pe (a, b), atunci există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Pentru aceasta verificăm condiţiile Teoremei lui Lagrange pe $[-4, 3]$. Întrucât

$$f(0_-) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{x+2}{2} = 1,\ f(0_+) = \lim_{x \searrow 0} \sqrt{1+x} = 1 \text{ şi } f(0) = 1,$$

avem că funcţia f este continuă în $x = 0$ şi concluzionăm că ea este continuă pe $[-4, 3]$.

Prin derivare obţinem:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, \ x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \ x > 0. \end{cases}$$

Deoarece

$$f'(0_-) = \frac{1}{2} \text{ şi } f'(0_+) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}$$

deducem că există $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{2}$ şi astfel f este derivabilă în 0 cu $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Din Teorema lui Lagrange avem există punctului $c \in (-4, 3)$ astfel încât tangenta în punctul de abscisă c e paralelă cu coarda AB, adică

$$\frac{f(3) - f(-4)}{3 - (-4)} = f'(c) \Leftrightarrow f'(c) = \frac{3}{7}.$$

Prin urmare $c \notin (-4, 0]$, iar ecuaţia

$$\frac{1}{2\sqrt{1+c}} = \frac{3}{7}$$

ne conduce la $c = \frac{13}{36} \in (0, 3)$.

Problema 5. Să se determine limita următoarelor şiruri:

(i) $a_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$;

(ii) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} kx^k$, $x \in (-1, 1)$.

Soluţie:

(i) Pentru orice $k = \overline{2, n}$ considerăm funcţia $f : [k, k+1] \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \ln(\ln x), \ \forall x \in [k, k+1].$$

Observăm că f verifică ipoteza Teoremei lui Lagrange. Astfel, există $c_k \in (k, k+1)$ astfel încât

$$\frac{f(k+1) - f(k)}{k + 1 - k} = f'(c_k),$$

adică

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{c_k \ln(c_k)}.$$

Deoarece $c_k \in (k, k+1)$ are loc dubla inegalitate:

$$k \ln(k) < c_k \ln(c_k) < (k+1)\ln(k+1),$$

iar

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < \frac{1}{c_k \ln(c_k)} < \frac{1}{k \ln(k)}.$$

Aşadar,

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < f(k+1) - f(k) < \frac{1}{k\ln(k)}, \forall k = \overline{2, n}.$$

Însumând după $k = \overline{2,n}$ obţinem:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < f(n+1) - f(2) < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}.$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \Big(f(n+1) - f(2)\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)\Big) = \infty,$$

din ultima parte a inegalităţii de mai sus avem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = \infty.$$

(ii) $a_n = \sum_{k=1}^{n} kx^k$ pentru orice $x \in (-1,1)$. Dar,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kx^k &= x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + nx^n \\
&= x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}) \\
&= x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n)' \\
&= x\Big(\frac{1 - x^{n+1}}{1-x}\Big)' \\
&= x\frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x}{(1-x)^2}\Big(1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n\Big).
\end{aligned}$$

Întrucât

$$\lim_{n\to\infty} nx^{n+1} = 0 \text{ şi } \lim_{n\to\infty} (n+1)x^n = 0,\ \forall x \in (-1,1)$$

deducem că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Problema 6. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}(x^2 + x + m)$, unde m este un parametru real. **(Culegere 757)** f este monotonă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă m aparţine mulţimii $\Big[\frac{1}{2}, \infty\Big)$. Răspuns E

Soluţie:

Determinăm

$$f'(x) = e^{2x}(2x^2 + 4x + 2m + 1).$$

Ecuaţia $f'(x) = 0$ conduce la

$$2x^2 + 4x + 2m + 1 = 0.$$

Pentru ca f să fie monotonă discriminatul ecuaţiei verifică inegalitatea

$$\Delta \le 0,$$

adică

$$8 - 16m \le 0,$$

ce conduce la $m \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

(Culegere 758) f are două puncte de extrem dacă şi numai dacă m aparţine mulţimii: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.
Răspuns A

Soluţie:
Pentru a avea două puncte de extrem, ecuaţia

$$f'(x) = 0$$

trebuie să admită două rădăcini reale şi distincte. Astfel $\Delta > 0$, asigură că $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

Problema 7. (Culegere 786) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax$, a este un parametru real. Pentru $a = -3$, numărul punctelor de extrem local ale funcţiei $g(x) = |f(x)|$, $x \in \mathbb{R}$ este: 5. Răspuns E

Soluţie:
Funcţia $g(x) = |x(x^2 - 3)|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Stabilim semnul expresiei $x(x^2 - 3)$ cu ajutorul tabelului de mai jos.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	∞
x	$- - -$	$- - -$	$- - -0$	$+++$	$+++$
$x^2 - 3$	$+++$	0	$- - -$	$- - -0$	$+++$
$x(x^2 - 3)$	$- - -$	$- - -0$	$+++0$	$- - -0$	$+++$

Folosind explicitarea modulului avem

$$g(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x, & x \in (-\infty, -\sqrt{3}] \\ x^3 - 3x, & x \in (-\sqrt{3}, 0] \\ -x^3 + 3x, & x \in (0, \sqrt{3}] \\ x^3 - 3x, & x \in (\sqrt{3}, \infty). \end{cases}$$

Derivata funcţiei g este:

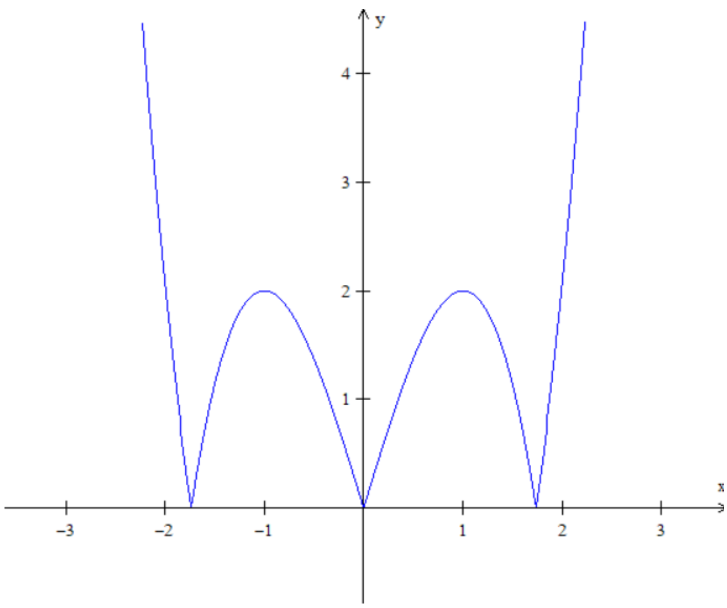
$$g'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 3, & x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \\ 3x^2 - 3, & x \in (-\sqrt{3}, 0) \\ -3x^2 + 3, & x \in (0, \sqrt{3}) \\ 3x^2 - 3, & x \in (\sqrt{3}, \infty), \end{cases}$$

iar ecuaţia $g'(x) = 0$ conduce la rădăcinile -1 şi 1.

Pentru determinarea numărului punctelor de extrem folosim tabelul de variaţie:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	$- - -$	$^{-6}\vert_{+6}$	$+++\ 0$	$- - -\ ^{-3}\vert_{+3}$	$+++\ 0$	$- - -\ ^{-6}\vert_{+6}$	$+++$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow 0$	$\nearrow 2$	$\searrow 0$	$\nearrow 2$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$

Astfel, numărul punctelor de extrem este 5.



Problema 8. (Culegere 713) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 |t - x|^3 dt$ are valoarea minimă pentru x egal cu: $\dfrac{1}{2}$. Răspuns C

Soluţie:

Distingem următoarele situaţii:

- Dacă $x \le 0$, atunci $t - x \ge 0$ şi $|t - x| = t - x$.
- Dacă $x \ge 1$, atunci $t - x \le 0$ şi $|t - x| = x - t$.
- Dacă $x \in (0, 1)$ avem:

$$|t - x| = \begin{cases} t - x, & \text{dacă } t \ge x \\ x - t, & \text{dacă } t < x. \end{cases}$$

Astfel pentru:

- $x \le 0$,

$$f(x) = \int_0^1 (t - x)^3 dt = \frac{(t - x)^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{(1 - x)^4 - x^4}{4}.$$

- $x \ge 1$,

$$f(x) = \int_0^1 (x - t)^3 dt = \frac{-(x - t)^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{x^4 - (x - 1)^4}{4}.$$

- $x \in (0, 1)$,

$$f(x) = \int_0^x (x - t)^3 dt + \int_x^1 (t - x)^3 dt = \frac{-(x - t)^4}{4}\bigg|_0^x + \frac{(t - x)^4}{4}\bigg|_x^1 = \frac{x^4 + (1 - x)^4}{4}.$$

Se determină

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3x + 1, & \text{dacă } x \in [1, \infty) \\ 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1, & \text{dacă } x \in (0, 1) \\ -3x^2 + 3x - 1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0]. \end{cases}$$

Ecuaţia $f'(x) = 0$ admite o unică soluţie $x = \frac{1}{2}$, iar tabelul de variaţie corespunzător funcţiei f este:

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	- - -	- - -	- - -	0	+ + +		+ + +	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\searrow$	$\frac{1}{32}$		$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$,

de unde $\frac{1}{2}$ reprezintă un punct de minim.

Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe I, $c_1 < c_2$ două rădăcini reale consecutive ale derivatei şi $f(c_1)f(c_2) < 0$, atunci există un unic $\alpha \in (c_1, c_2)$ astfel încât $f(\alpha) = 0$.

(Şirul lui Rolle) Fiind dată funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă pe I, $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ rădăcini reale ale derivatei f', atunci numerele

$$\lim_{x\to\inf I} f(x),\ f(c_1),\ f(c_2),\ \cdots,\ f(c_n),\ \lim_{x\to\sup I} f(x)$$

în această ordine se numeşte şirul lui Rolle.

Numărul variaţiilor de semn din şirul lui Rolle este egal cu numărul rădăcinilor reale ale funcţiei f.

Problema 9. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei:

$$3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 12 = 0.$$

Soluţie:
Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 12$. Ecuaţia $f'(x) = 0$, anume

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0,$$

ne conduce la rădăcinile $c_1 = -2$, $c_2 = -1$ şi $c_3 = 1$. Cum

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

şirul lui Rolle ataşat funcţiei f este:

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
şirul lui Rolle	$+\infty$	20	25	-7	$+\infty$

Prin urmare ecuaţia admite două rădăcini reale $x_1 \in (-1, 1)$ şi $x_2 \in (1, +\infty)$.

Problema 10. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{6} + \frac{1}{x^2}.$$

Pentru ce valoare a parametrului $a > 0$, $\int_a^{2a} f(x)dx$ ia cea mai mică valoare.

Soluţie:

Notând cu $A(a)=\int_a^{2a} f(x)dx$ avem

$$\begin{aligned} A(a) &= \int_a^{2a}\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{x^2}\right)dx \\ &= \left(\frac{x^2}{12}-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^{2a} \\ &= \frac{a^2}{4}+\frac{1}{2a}. \end{aligned}$$

Cum

$$A'(a)=\frac{a^3-1}{2a^2},$$

avem că ecuaţia $A'(a)=0$ admite pe $a=1$ rădăcină. Tabelul de variaţie corespunzător este:

$a\vert$	0		1		$+\infty$
$A'(a)\vert$	$---$		0		$+++$
$A(a)\vert$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty.$

$A_{min}=A(1)=\frac{3}{4}.$

Problema 11. (Culegere 506) Determinaţi

$$\lim_{n\to\infty} n^3\int_n^{n+3}\frac{x^3}{x^6+1}dx.$$

Soluţie:

Teorema de medie. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c).$$

Folosind teorema de medie de mai sus, avem existenţa unui punct $c_n\in(n,n+3)$ astfel încât

$$\int_n^{n+3}\frac{x^3}{x^6+1}dx=(n+3-n)\cdot\frac{{c_n}^3}{{c_n}^6+1}=3\cdot\frac{{c_n}^3}{{c_n}^6+1}.$$

Deoarece

$$\frac{n^3}{(n+3)^6+1}\le\frac{{c_n}^3}{{c_n}^6+1}\le\frac{(n+3)^3}{n^6+1},$$

folosind teorema cleştelui

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^6}{(n+3)^6+1}\le\lim_{n\to\infty}3n^3\cdot\frac{{c_n}^3}{{c_n}^6+1}\le\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3(n+3)^3}{n^6+1},$$

obţinem

$$\lim_{n\to\infty}3n^3\cdot\frac{{c_n}^3}{{c_n}^6+1}=3.$$ Răspuns E

Problema 12. (Culegere 512) Determinaţi

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_t^{2t}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}dx.$$

Soluţie:
Din teorema de medie avem existenţa unui punct $c \in (t, 2t)$ astfel încât

$$\int_t^{2t} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} dx = (2t - t) \cdot \frac{\ln(1+c)}{\sin c} = t \cdot \frac{\ln(1+c)}{\sin c}.$$

Întrucât $c \in (t, 2t)$ şi $t \to 0$, avem $c \to 0$ şi

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_t^{2t} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} dx = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot t \cdot \frac{\ln(1+c)}{\sin c} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+c)}{c} \cdot \frac{c}{\sin c} = 1.$$ Răspuns C

Problema 13. (Culegere 514) Determinaţi

$$\lim_{n \to \infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x + 1}}.$$

Soluţie:

Aplicăm teorema de medie. Astfel există $c_n \in (n, n+1)$ cu proprietatea că:

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x + 1}} = (n + 1 - n) \cdot \frac{1}{\sqrt{{c_n}^3 + c_n + 1}} = \frac{1}{\sqrt{{c_n}^3 + c_n + 1}}.$$

Trecând la limită cu $n \to \infty$ avem $c_n \to \infty$ şi

$$\lim_{n \to \infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x + 1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{{c_n}^3 + c_n + 1}} = 0.$$ Răspuns B

Problema 14. (Culegere 531) Determinaţi

$$\lim_{t \to 0} \int_{2^t}^{3^t} \frac{x}{\ln x} dx.$$

Soluţie:
Cu notaţia $x = e^y$, $y = \ln x$ şi integrala devine

$$\int_{t \ln 2}^{t \ln 3} \frac{e^{2y}}{y} dy.$$

Folosim acum: Teorema de medie-II. Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, $g(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in [a, b]$, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Avem că există $c \in (t \ln 2, t \ln 3)$ astfel încât

$$\int_{t \ln 2}^{t \ln 3} \frac{e^{2y}}{y} dy = e^{2c} \int_{t \ln 2}^{t \ln 3} \frac{1}{y} dy = e^{2c} \ln y \Big|_{t \ln 2}^{t \ln 3} = e^{2c} \ln \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Prin urmare,

$$\lim_{t\to 0}\int_{2^t}^{3^t}\frac{x}{\ln x}dx=\lim_{t\to 0}e^{2c}\ln\frac{\ln 3}{\ln 2}=\ln\frac{\ln 3}{\ln 2}.\quad \text{Răspuns C}$$

Problema 15. (Culegere 508) Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}e^{t^3}dt$. Atunci $F'(2)$ este: $4e^{64}$. Răspuns A

Soluţie:

Deoarece funcţia $g(x)=e^{x^3}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, ea admite primitive. Fie $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei g. Atunci

$$\int_0^x g(t)dt=G(x)-G(0),$$

iar

$$F(x)=G(x^2)-G(0).$$

Prin derivare avem

$$F'(x)=2xG'(x^2)=2xg(x^2)=2xe^{x^6},$$

de unde

$$F'(2)=4e^{64}.$$